

International Scientific League of

PAYA
2024

لیگ علمی بین المللی پیشگام اسلام

چهارمین دوره



کویر



دانشگاه



دانشگاه

دفترچه پیشآزمون مرحله مقدماتی

لیگ علوم ریاضی

پایه یازدهم

اسفند ۱۴۰۲

خیابان فاطمی غربی، بین سیندخت و جمالزاده شمالی، پلاک ۲۵۰، خانه ریاضی تهران
شماره تماس: ۰۹۱۹۴۶۷۴۱۹

کanal تلگرام خانه ریاضی تهران: @Mathhome
کanal ایتاو تلگرام پایا: @payaleague

پیش آزمون ۱



مکانیک، یکی از شاخه‌های فیزیک است که در آن به بررسی حرکت اجسام و نیروهای وارد شده به آن‌ها می‌پردازد.

زمانی که مختصات جسمی نسبت به یک مبدأ فرضی با گذشت زمان تغییر کند، این جسم نسبت به آن مختصات در حال حرکت است. به عبارت دیگر زمانی که موقعیت جسم نسبت به اشیای اطراف آن تغییر می‌کند جسم در حال حرکت است. ممکن است جسمی نسبت به جسمی دیگر در حال حرکت باشد ولی نسبت به یک جسم دیگر در حال سکون باشد. بنابراین حرکت یک مفهوم نسبی است. مسافران یک اتوبوس نسبت به خود اتوبوس در حال سکون ولی نسبت به درختان کنار جاده در حال حرکتند. هرگاه مکان جسمی نسبت به زمان تغییر نکند، جسم در حال سکون نسبی است. یک درخت نسبت به زمین ساکن ولی نسبت به خورشید در حال حرکت است. وقتی قطاری از یک ایستگاه عبور می‌کند؛ قطار نسبت به ایستگاه در حال حرکت است ولی مسافر درون آن می‌تواند بگوید که ایستگاه نسبت به قطار در حال حرکت است. سرعت متوسط جسم در حال حرکت برابر است با مقدار جابه‌جاوی (کوتاه‌ترین فاصله بین مبدأ و مقصد) تقسیم بر زمان جابه‌جاوی و برابر با $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ است. بنابراین برای جسمی که دارای حرکت با

سرعت ثابت است، خواهیم داشت:

$$x = vt + x_0$$

از طرف دیگر، شتاب متوسط یک جسم در حال حرکت برابر است با تغییرات بردار سرعت تقسیم بر زمان و از رابطه $\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$ بدست می‌آید. برای جسمی که با شتاب ثابت a در راستای محور x در حال حرکت است معادله سرعت –

زمان برابر است با:

$$v = at + v_0$$

اگر در حرکتی اندازه سرعت ثابت باشد، حرکت یکنواخت است. مثلاً وقتی متحرکی با سرعت ۲۰ کیلومتر بر ساعت از تبریز به تهران می‌رود، در همه مسیر حرکت حتی در سر پیچ‌ها هم با همین سرعت عبور می‌کند. این حرکت را یکنواخت گویند.

نیرو را به کمک نیروسنج اندازه‌گیری می‌کنیم و یکای آن، نیوتون است که با نماد N نشان داده می‌شود. اثر نیرو بر یک جسم به شکل‌های مختلف مانند شروع به حرکت کردن، توقف، کم و زیاد شدن اندازه سرعت (تندی)، تغییر جهت سرعت و تغییر شکل آن جسم، خود را نشان می‌دهد. با توجه به آنچه در مورد سرعت فرا گرفتیم، می‌توان به طور خلاصه نشان داد که نیروی وارد بر یک جسم می‌تواند سبب تغییر سرعت جسم یا تغییر شکل آن شود.

قوانين نیوتون

نیوتون نخستین کسی بود که به رابطه میان نیرو و شتاب پی برد. این رابطه همراه با دیگر قانون‌های نیوتون، اساس مکانیک نیوتونی را تشکیل می‌دهند.

(الف) قانون اول نیوتون:

اگر به جسمی به طور هم زمان چند نیرو اثر کند و این نیروها اثر یکدیگر را خنثی کنند، به عبارت دیگر، برایند نیروهای وارد بر جسم صفر شود، می‌گوییم نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند.

ب) قانون دوم نیوتون (قانون لختی یا اینرسی)

هرگاه بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت وارون دارد.

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m}$$

پ) قانون سوم نیوتون:

نیروها همواره به صورت جفت وجود دارند. اگر یکی از این نیروها را کنش بنامیم، نیروی دیگر واکنش نامیده می‌شود. قانون سوم نیوتون رابطه کمی بین نیروهای کنش و واکنش را به صورت زیر بیان می‌کند: هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرویی هم اندازه و هم راستا اما در خلاف جهت وارد می‌کند.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \rightarrow |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

\vec{F}_{12} : نیرویی که جسم ۱ به جسم ۲ وارد می‌کند.

\vec{F}_{21} : نیرویی که جسم ۲ به جسم ۱ وارد می‌کند.

(دقت داشت باشید که اشیفاده از علامت قدر مطلق برای بردارها نشان دهنده بزرگی آن بردار یا اندازه‌اش است)
قضیه کار – انرژی:

همه اجسام در حال حرکت دارای انرژی جنبشی به صورت $K = \frac{1}{2}mv^2$ هستند؛ و تغییرات انرژی جنبشی برابر است با مقدار زیر:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

اگر نیروی \vec{F} به جسمی با جرم m وارد شود، کار انجام شده توسط نیروی ثابت برابر است با:

$$W = Fd \cos \alpha$$

با توجه به قضیه کار – انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$W = \Delta K = Fd \cos \alpha = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

البته این رابطه تنها در صورتی معتبر است که فقط \vec{F} بر جسم عمل کند.
اندازه حرکت (تکانه):

تمایل هر جسم به جرم m برای انتقال با سرعت \vec{v} را تکانه یا اندازه حرکت می‌نامیم که کمیتی برداری با واحد $\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ بوده و برابر

است با:

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \Delta p = m\Delta v = m(v_2 - v_1)$$

با توجه به رابطه انرژی جنبشی، می‌توان رابطه تکانه و انرژی جنبشی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

قانون دوم نیوتون به بیان تکانه:

مطابق با قانون دوم نیوتون داریم:

بنابراین خواهیم داشت:

$$F_{\text{net}} = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

یعنی برایند نیروهای وارد بر جسم با آهنگ تغییرات تکانه برابر است.



نسبیت:

نظریه نسبیت، نظریه‌ای از فضا و زمان که به کمک آن T مقادیر اندازه‌گیری شده کمیت‌های فیزیکی توسط ناظرها م مختلف مقایسه می‌شوند.

چارچوب مرجع لخت:

دستگاه مختصاتی که در آن قانون اول نیوتن (قانون لختی، اینرسی) ثابت باشد یا به اصطلاح دستگاه مختصات بدون شتاب را گویند.

ناظرها اینرسی:

ناظرها ای را که از نظر آن‌ها قانون اول نیوتن (قانون اینرسی) برقرار است ناظرها اینرسی می‌نامیم. از نظر این ناظرها اگر به یک جسم نیروی خالصی وارد نشود، جسم تمایل دارد وضعیت اولیه خود را حفظ کند؛ بنابراین یا ساکن است و یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

اصل نسبیت:

این اصل بیان می‌کند که قوانین فیزیک در تمام دستگاه‌های لخت یکسان، یا اصطلاحاً هم‌وردا هستند؛ یعنی شکل ریاضی یک قانون فیزیکی یکسان باقی می‌ماند.

دستگاه لخت:

یک دستگاه لخت به عنوان یک چارچوب مرجع مختصات که در آن قانون لختی صادق است تعریف می‌شود. اگر جسمی در یک دستگاه لخت قرار داشته باشد و هیچ نیروی خارجی خالصی به آن وارد نشود با سرعت ثابتی حرکت خواهد کرد. برای تعیین این که ناظری در یک دستگاه لخت قرار دارد یا نه، آزمایش ساده زیر را انجام می‌دهیم:

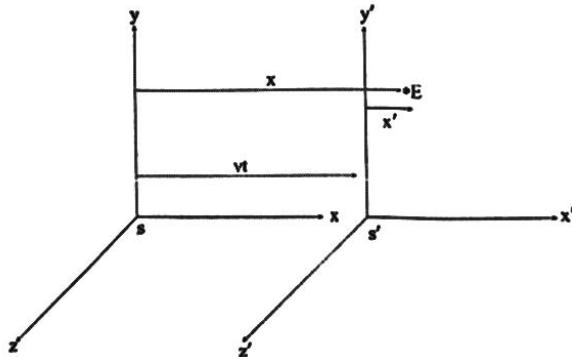
ناظر جسمی را پرتاب می‌کند. اگر آن جسم مسیر بدون انحرافی را با سرعت ثابت طی کند، آن دستگاه لخت خواهد بود. این کار فقط در یک دستگاه لخت واقعی امکان‌پذیر است. یا چنین دستگاهی فقط در فضای خالی و دور از دیگر جرم‌ها می‌تواند وجود داشته باشد.

از آن‌جاکه قوانین فیزیک برای تمام دستگاه‌های لخت یکسان هستند، اصل نسبیت اشاره به آن دارد که کلیه دستگاه‌های لخت معادل هستند. به طوری که با آزمایش فیزیکی نمی‌توان هیچ دستگاه لختی را از دستگاه لخت دیگر متمایز کرد.

تبديلات گالیله:

در فیزیک به هر ناظری یک دستگاه مختصات نسبت می‌دهیم. معادلاتی که در فیزیک غیر نسبیتی مختصات فضا و زمان دو دستگاه مختصات را که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند، به هم مربوط می‌سازد را تبدیلات گالیله یا تبدیلات نیوتن می‌نامیم.

با توجه به نمودار زیر، دو ناظر ۱ و ۲ را که به ترتیب در دستگاه‌های S' و S قرار دارند در نظر بگیریم. دستگاه S' نسبت به دستگاه S با سرعت ثابت v به طرف راست حرکت می‌کند و بر عکس S نسبت به S' با سرعت $-v$ به طرف چپ حرکت می‌کند.



در این نمودار داریم:

چارچوب S (با مختصات x, y, z)

چارچوب S' (با مختصات x', y', z')

دستگاه‌های مختصات S و S' ، لخت هستند؛ دو دستگاه مختصات که نسبت به هم با سرعت ثابت v در حال حرکت هستند. در دو چارچوب S و S' ، محورهای x و x' مشترک و محورهای y و y' و نیز z و z' موازی هستند. از نظر ناظری که در دستگاه S است، دستگاه S' با سرعت ثابت v در جهت مثبت محور x ها در حال حرکت می‌کند؛ همین‌طور از نظر ناظری که در دستگاه S' است، چارچوب S با سرعت ثابت v در جهت منفی محور x ها در حال حرکت است. نقطه E معروف رویدادی است که مختصات فضا و زمان آن می‌تواند توسط هر کدام از ناظرها اندازه‌گیری شود. توجه داشته باشید که مبدأهای S و S' در زمان‌های $t = 0$ و $t' = 0$ بر یکدیگر منطبق بوده‌اند. در فیزیک غیر نسبیتی، فرض می‌شود که زمان می‌تواند مستقل از هر چارچوب مرجع خاصی تعیین شود؛ یعنی همواره $t = t'$ می‌باشد.

تبديلات گالیله از دیدگاه هر یک از ناظرها S و S' در توصیف رویداد E :

دیدگاه ناظر S :

$$x = vt' + x'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

دیدگاه ناظر S' :

$$x' = -vt + x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$



در تبدیلات فوق برای تبدیل مقادیر موجود در هر دستگاه به دستگاه دیگر، کافیست که به ترتیب v را به v' و t را به t' ، x را به x' ، y را به y' و z را به z' تغییر دهیم.

پیش آزمون ۳

International Scientific League of
PASA
2024

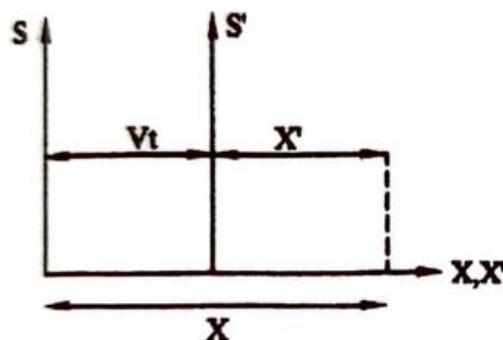
نظریه نسبیت خاص نخستین بار توسط اینشتین در سال ۱۹۰۵ میلادی ارائه شد. نسبیت خاص بر پایه دو اصل بنا شده که عبارتند از: اصل نسبیت و اصل ثابت بودن سرعت نور.

اصل نسبیت:

قوانين فیزیکی نسبت به تمام چارچوب‌های اینرسی (لخت) یکسان است.

اصل ثابت بودن سرعت نور:

سرعت نور در خلا از دید همه ناظرهای اینرسی مقدار ثابتی است.



اصل اول شبیه جمله‌ای است که نیوتون در بیانش از قوانین فیزیک کلاسیک به کار برد. اینشتین با تغییر تبدیلات لورنتس و در نظر گرفتن ضریب ثابتی به نام گاما $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ که به سرعت بستگی دارد، نشان داد:

$$x' = \gamma(v)(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma(v) \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

منظور از γ این است که γ تابعی از سرعت است. اینشتین با اعمال تبدیلات لورنتس تبدیلات زیر را نیز به دست آورد:

$$x = \gamma(v)(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma(v) \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

اگر یک رویداد در یک دستگاه مختصات لخت در x_1 , y_1 , z_1 و زمان t_1 روی دهد و در دستگاه مختصات لخت دیگر در x'_1 , y'_1 , z'_1 و زمان t'_1 روی دهد، حال اگر دو رویداد را در نظر بگیرید، فاصله زمانی و فاصله فضایی بین آنها در دو چارچوب مختلف به صورت زیر می‌شود:

$$\Delta x' = \gamma(v)(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \neq \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t} = \gamma(v) \left(\Delta t - \frac{v}{c^r} \Delta x \right)$$

توجه کنید که در روابط بالا دو دستگاه در یکسو در حال حرکت می‌باشند. اگر دو دستگاه در دو سوی مخالف در حال حرکت باشند (دو دستگاه به جای دور شدن از هم به هم نزدیک شوند) در این صورت باید در روابط بالا v تبدیل به $-v$ شود.

وقتی که $c < v$ باشد، یعنی سرعت حرکت در مقایسه با سرعت نور قابل چشمپوشی باشد، تبدیلات گالیله یک تقریب عالی از تبدیلات لورنتس هستند. بنابراین تبدیلات گالیله را می‌توان به عنوان تبدیلات صحیح مختصات، در یک جهان فرضی، که در آن سرعت نور نامتناهی است در نظر گرفت.

از معادلات تبدیل لورنتس به وضوح نتیجه می‌شود که هیچ سرعتی نمی‌تواند از c بیشتر باشد. تنها اگر $c < v$ باشد، کمیت

$$\sqrt{1 - \frac{v^r}{c^r}}$$

که در این معادلات ظاهر می‌شود، حقیقی خواهد بود

$$\Delta x = \gamma(v)(\Delta x' - v \Delta t')$$

$$\Delta y = \Delta y'$$

$$\Delta z = \Delta z'$$

$$\Delta t = \gamma(v) \left(\Delta t' - \frac{v}{c^r} \Delta x' \right)$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^r}{c^r}}}$$

در بالا $\gamma(v)$ می‌باشد که به آن ضریب لورنتس می‌گویند و مقدار آن همیشه بزرگ‌تر یا مساوی یک می‌باشد. می‌توان

نشان داد که کمیت $\Delta S^r = c^r \Delta t^r - \Delta x^r - \Delta y^r - \Delta z^r$ کمیتی پایسته است؛ به این معنی که مقدار آن از نظر تمام ناظرهای اینرسی یکسان است. به عبارت دیگر:

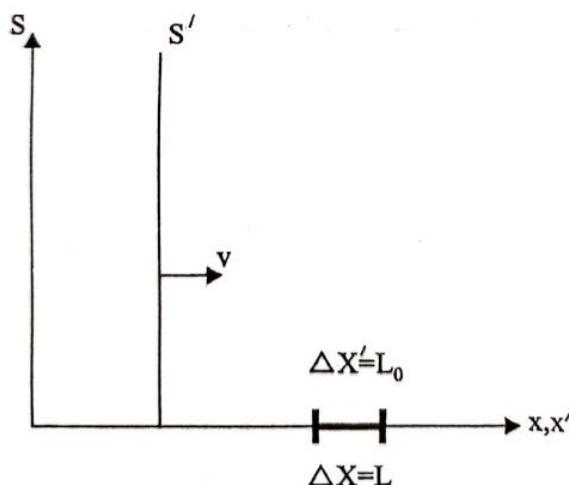
$$\Delta S^r = c^r \Delta t^r - \Delta x^r - \Delta y^r - \Delta z^r = c^r \Delta t'^r - \Delta x'^r - \Delta y'^r - \Delta z'^r$$

اتساع زمان و انقباض طول انقباض طول:

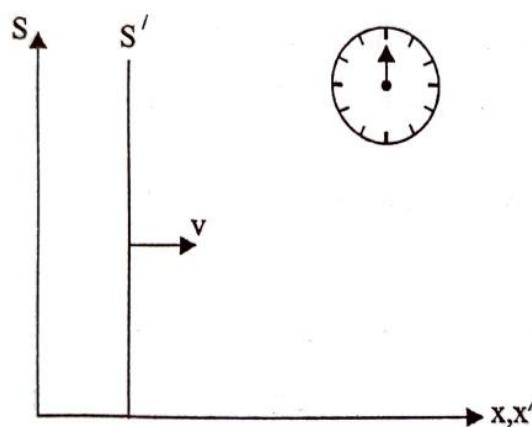
طول یک جسم به وسیله اندازه‌گیری مکان دو انتهای آن جسم در یک زمان صورت می‌گیرد. مثلاً اندازه‌گیری هم‌زمان در چارچوب $(\Delta t = \cdot)$ می‌دهد:

$$\begin{cases} \Delta x = L \\ \Delta t = \cdot \end{cases}; \begin{cases} \Delta x' = L \\ \Delta t' \neq \cdot \end{cases}; \Delta x' = \gamma(v)(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

از آنجا که S' ناظری است که جسم را ساکن مشاهده می‌کند، $\Delta x' = L'$ را طول سکون جسم یا طول ویژه می‌نامیم. با توجه به این که $1 \leq \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ است، پس طول یک جسم از نظر ناظرهایی که جسم را متحرک می‌بیند (S) کوتاه‌تر از طول سکون آن است. یا به عبارت دیگر طول سکون (ویژه) بلندترین طول است که به یک جسم نسبت داده می‌شود.



اکنون ساعتی را در نظر بگیرید که نسبت به چارچوب متحرک S' ساکن است. منطبق شدن متواالی عقربه ساعت روی یک عدد (مثلاً ۱۲) را واحد زمان در نظر می‌گیریم.





International Scientific League of

Physics

2021

$$\text{این رویداد از نظر ناظر } S' \text{ در یک مکان روی می‌دهد. } (\Delta t' = T) \text{ پس:}$$
$$\begin{cases} \Delta t = T \\ \Delta x' \neq . \end{cases}; \begin{cases} \Delta t' = T \\ \Delta x' = . \end{cases}; \Delta t = \gamma(v) \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) \Rightarrow T = \gamma(v)T' \Rightarrow T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

این عبارت حاکی از آن است که بازه زمانی بین دو رویداد از نظر ناظر ساکن نسبت به آن دو رویداد $(\Delta t' = T)$, کوچک‌ترین بازه زمانی است که به این دو رویداد نسبت می‌دهند. به این زمان، معمولاً زمان ویژه می‌گویند. (زمان ویژه کوچک‌ترین زمانی است که به دو رویداد نسبت داده می‌شود).

انرژی کل یک ذره با جرم m به صورت زیر تعریف می‌شود که در آن سرعت نور $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ و جرم سکون ذره

است: اینشتین نشان داد که انرژی یک جسم (E) از رابطه زیر قابل محاسبه لست و با جرم روابطی مستقیم دارد:

$$E = mc^2 = m \cdot c^2 \gamma(u)$$

در این رابطه u تندی ذره بوده و جرم سکون ذره برابر است با رابطه زیر که جرم m را اصطلاحاً جرم نسبیتی ذره

می‌نامیم.

$$m_0 = m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

در روابط فوق $m_0 c^2$ انرژی سکون ذره (E_0) و همچنین طبق مکانیک کلاسیک $K = \frac{1}{2} mu^2$ انرژی جنبشی ذره

است. در نتیجه انرژی کل یک ذره برابر است با:

$$E = K + E_0 \rightarrow K = E - E_0$$

در نتیجه انرژی جنبشی نسبیتی یک ذره به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)$$

با توجه به تعریف اندازه حرکت (تکانه) که تمایل هر ذره برای انتقال است، تکانه نسبیتی ذره مطابق با انرژی جنبشی برابر است:

$$\vec{p} = m_0 \vec{u} \gamma(u) = m_0 \vec{u} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$